Mihai Monea
Steluța Monea

Ioan Șerdean
Adrian Zanoschi

Bacalaureat 2019

Matematică

M_șt-nat
M_tehnologic

Teme recapitulative
40 de teste, după modelul M.E.N.
(10 teste fără soluții)

Editura Paralela 45

Cuprins

Clasa a XII-a

TESTE PENTRU BACALAUREAT 2019, DUPĂ MODELUL M.E.N.

Teme recapitulative

Clasa a IX-a

1. Mulțimi și elemente de logică matematică

1.1. Noțiuni teoretice

1.1.1. Elemente de logică matematică

Definiție: Se numeşte **propoziție** un enunţ despre care ştim care este valoarea sa de adevăr.

Variabile	Operație	Notație	Citire	Valoare de adevăr
p	Negaţia	$\neg p$	non p	Opusă propoziţiei p.
p, q	Conjuncţia	$p \wedge q$	p şi q	Este adevărată când propoziţiile p şi q sunt adevărate.
p, q	Disjuncţia	$p \vee q$	p sau q	Este adevărată când cel puţin una dintre propoziţii este adevărată.
p, q	Implicaţia	$p \rightarrow q$	p implică q	Este falsă când p este adevărată şi q falsă.
p, q	Echivalenţa	$p \leftrightarrow q$	p echivalent cu q	Este adevărată când ambele au aceeaşi valoare de adevăr.

Definiție: Se numeşte **predicat** un enunţ care depinde de una sau mai multe variabile şi care se transformă în propoziţie prin valori date variabilelor.

Variabile	Operație	Notație	Citire	Observații
$p(x)$	Propoziţia universală	$\forall x,\ p(x)$	Pentru orice x are loc $p(x)$.	Demonstrarea valorii de adevăr se face prin calcule cu caracter general şi nu prin exemplu. Un exemplu poate fi suficient pentru a demonstra că această propoziţie este falsă.

$p(x)$	Propoziția existențială	$\exists x,\ p(x)$	Există x astfel încât are loc $p(x)$.	Demonstrarea valorii de adevăr se realizează prin determinarea unui exemplu. Acesta poate fi chiar ghicit, dar trebuie verificat că este convenabil.

1.1.2. Tipuri speciale de raționament

Metoda reducerii la absurd: Pentru a demonstra o implicație de tipul $p \rightarrow q$, putem presupune concluzia p ca fiind falsă și apoi împreună cu ipoteza construim un raționament care conduce la contradicție.

Metoda inducției matematice: Se aplică pentru propoziții universale de forma $\forall n \geq n_0,\ p(n)$. Se verifică valoarea de adevăr a propoziției obținute în cazul $n = n_0$, se presupune ca fiind adevărată propoziția obținută în cazul $n = k$ și se demonstrează valoarea de adevăr a propoziției obținute pentru $n = k + 1$.

1.1.3. Mulțimi și cardinale

Relație sau operație	Notație	Definiție
Incluziunea	$A \subset B$	$A \subset B \Leftrightarrow (\forall x \in A \Rightarrow x \in B)$
Egalitatea	$A = B$	$A = B \Leftrightarrow A \subset B$ și $B \subset A$
Intersecția	$A \cap B$	$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$
Reuniunea	$A \cup B$	$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$
Diferența	$A \setminus B$	$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$
Produsul cartezian	$A \times B$	$A \times B = \{(a,\ b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$

Teoremă: Orice mulțime A cu n elemente, unde $n \in \mathbb{N}$, admite 2^n submulțimi.

Definiție: Pentru o mulțime finită A numim **cardinalul** său și notăm Card (A) numărul său de elemente.

Proprietăți: Sunt adevărate următoarele proprietăți:

P1. Card $(A) = 0$ dacă și numai dacă $A = \varnothing$;

P2. Dacă $A \subset B$, atunci Card $(B - A) =$ Card $(B) -$ Card (A);

P3. Card $(A \cup B) =$ Card $(A) +$ Card $(B) -$ Card $(A \cap B)$;

P4. Card $(A \times B) =$ Card $(A) \cdot$ Card (B).

1.1.4. Mulțimea numerelor reale $\mathbb{R}$

Definiție: Numim **modulul** unui număr real x și notăm $|x|$ distanța de la originea axelor la poziția numărului pe axă.

Proprietățile modulului:

P1. $|x| \geq 0,\ \forall\ x \in \mathbb{R}$; **P2.** $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$; **P3.** $|x| = |y| \Leftrightarrow x = \pm y$;

1.3. Probleme de consolidare

C1. Fie mulţimea $A = \{a, b, c, d\}$. Determinaţi numărul de submulţimi ale lui A care îl conţin pe d.

C2. O mulţime admite 31 de submulţimi nevide. Determinaţi numărul de elemente ale acestei mulţimi.

C3. Două mulţimi cu câte 2008 elemente fiecare au 1000 de elemente comune. Determinaţi numărul de elemente ale reuniunii lor.

C4. Fie mulţimea $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Determinaţi numărul de submulţimi care conţin simultan pe 1 şi pe 3.

C5. Considerăm propoziţiile $p : 2^5 > 5^2$ şi $q : \sqrt{7} > 2$. Precizaţi valoarea de adevăr a propoziţiei $p \wedge q$.

C6. Determinaţi elementele mulţimii $\left\{x \in \mathbb{Z} \,\middle|\, \frac{6}{2x+1} \in \mathbb{Z}\right\}$.

C7. Determinaţi toate valorile reale ale numărului x dacă $2 \in (4x - 2; 2x + 6)$.

C8. Elevii unei clase sunt angrenaţi fiecare într-o activitate sportivă, 12 la volei, iar 25 la fotbal. Ştiind că 7 dintre ei practică ambele sporturi, determinaţi numărul de elevi ai clasei.

C9. Determinaţi cel mai mare număr natural al mulţimii $A \setminus B$, dacă $A = [5, 6]$ şi $B = [5, 10]$.

C10. Determinaţi câte elemente întregi conţine mulţimea $A \cup B$, unde $A = (-2, 3)$ şi $B = (0, 5)$.

C11. Ordonaţi crescător numerele $a = 2{,}010$, $b = 2{,}0(10)$ şi $c = 2{,}(010)$.

C12. Determinaţi cardinalul mulţimii $A = \left\{x \in \mathbb{Z} \,\middle|\, \frac{2}{x-3} \in \mathbb{Z}\right\}$.

C13. Fie numărul raţional $\frac{11}{9} = 1,\ a_1a_2\ldots a_n\ldots$. Calculaţi $P = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{10}$.

C14. Fie numărul raţional $\frac{13}{6} = 2,\ a_1a_2\ldots a_n\ldots$. De câte ori apare cifra 3 printre cifrele $a_1, a_2, \ldots, a_{2004}$?

C15. Se consideră numărul raţional $\frac{23}{15} = 0,\ a_1a_2\ldots a_n\ldots$. Calculaţi:

$S = a_1 + a_2 + \ldots + a_{2009}$.

C16. Determinaţi cardinalul mulţimii $(A \setminus B) \cap \mathbb{Z}$, unde $A = (-3, 4]$, iar $B = (1, 5]$.

C17. Fie numerele $a = \sqrt{98} - \sqrt{32} - \sqrt{8}$ şi $b = \sqrt{162} + \sqrt{18} + \sqrt{72}$. Calculaţi media geometrică a numerelor a şi b.

C18. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $|1 - 2x| = |x + 4|$.

C19. Demonstraţi că numărul $\left|2-\sqrt{5}\right|+\left|3-\sqrt{5}\right|$ este număr natural.

C20. Rezolvaţi în $\mathbb{Z}$ ecuaţia $|3x-2|=11$.

C21*. Calculaţi $\left[\frac{17}{5}\right]+\left\{\frac{11}{6}\right\}$, unde $[x]$ şi $\{x\}$ reprezintă partea întreagă, respectiv partea fracţionară a numărului real x.

C22*. Determinaţi partea întreagă a numărului $a=\sqrt{17}$.

C23*. Determinaţi partea fracţionară a numărului $b=\sqrt{25}+\sqrt{26}$.

C24*. Se consideră numărul $A = \sqrt{(\sqrt{2}-3)^2}+\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}$. Demonstraţi că $A \in \mathbb{N}$.

C25*. Arătaţi că $A = \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$ este număr natural.

C26*. Demonstraţi egalitatea $\left[\sqrt{3}+\sqrt{25}\right]=\left[\sqrt{4}+\sqrt{19}\right]$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x.

C27*. Demonstraţi prin inducţie matematică că, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, are loc egalitatea: $1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

C28*. Demonstraţi prin inducţie matematică că, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, are loc egalitatea: $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$.

C29*. Demonstraţi că numărul $\sqrt{5}+\sqrt{7}$ este iraţional.

C30*. Arătaţi că, pentru orice număr natural n diferit de zero, fracţia $\frac{2n-1}{2n+1}$ este ireductibilă.

1.4. Teste de verificare

Testul 1

1. Determinaţi elementele mulţimii $A \cap B$ dacă $A = (2003,\ 2015)$ şi $B = (2014,\ 2016)$.

2. Calculaţi suma $|-3| + |-5| \cdot 2$.

3. Stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiei $p: \sqrt{4} + \sqrt{36} = \sqrt{64}$.

4. Câte submulţimi ale mulţimii $A = \{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ conţin doar numere impare?

5. Ordonaţi crescător numerele $a = \sqrt{4} - 4$, $b = \sqrt{9} - 9$ şi $c = \sqrt{16} - 16$.

6. Demonstraţi că numărul $A = \left(2 + \sqrt{5}\right)^2 + \left(2 - \sqrt{5}\right)^2$ este natural.

Testul 2*

1. Determinaţi cel mai mic număr întreg al mulţimii $A \cap B$ dacă $A = (2010, 2016)$ şi $B = (2013, 2020)$.

2. Determinaţi partea întreagă a numărului $x = \sqrt{8} + \sqrt{18} - \sqrt{32}$.

3. Se consideră predicatul $p(x): \dfrac{2x+1}{2x}$, unde $x \in \mathbb{N}^*$. Demonstraţi că propoziţia $\exists\, x \in \mathbb{N}^*,\ p(x) \in \mathbb{N}$ este falsă.

4. Comparaţi numerele $a = 5\sqrt{3}$ şi $b = 3\sqrt{7}$.

5. Numărul raţional $\dfrac{5}{4} = \overline{1,a_1a_2a_3...a_n...}$. Calculaţi suma $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{2014}$.

6. Demonstraţi prin inducţie matematică că egalitatea $1 + 2 + 2^2 + ... + 2^n = 2^{n+1} - 1$ este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

2. Șiruri. Progresii

2.1. Noțiuni teoretice

2.1.1. Șiruri

Terminologie:

- Vom nota cu $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ mulţimea termenilor şirului;
- x_n reprezintă al n-lea termen al şirului.

Forme de prezentare:

- Prin enumerarea termenilor, de exemplu şirul 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, ...;